Fiche 4
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS : CORRIGÉ DES EXERCICES

PARTIE III : Applications

Exercice 2 : *Fonction ζ de Riemann*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

1 - Montrer que ζ est définie sur $]1, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

• Soit $x \in]1, +\infty[$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ converge (série de Riemann). On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

• Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ζ_n est dérivable sur $[a, +\infty[$, et on a $\zeta_n'(x) = -\ln(n)\exp(-x\ln(n)) = -\ln(n)n^{-x}$ pour tout $x \in [a, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \exp(-x\ln(n))$ étant décroissante sur $[a, +\infty[$, on en déduite que :

$$\|\zeta_n'\|_\infty = \sup_{[a,+\infty[} |\zeta_n'(x)| = \ln(n)n^{-a} .$$

Considérons à présent $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \rho < a$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\rho \ln(n)n^{-a} = \lim_{n\to+\infty} n^{\rho-a}\ln(n) = 0$$

d'après le critère de comparaison des suites de références. On en déduit que $\ln(n)n^{-a} < \dfrac{1}{n^\rho}$ à partir d'un certain rang, et on obtient la convergence de la série de terme général $\ln(n)n^{-a}$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. On obtient donc le caractère $\mathcal{C}^1$ de la série sur cet intervalle en appliquant le théorème de dérivabilité des séries de fonctions.

2 - Montrer que ζ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

D'après ce qui précède, on a, pour tout $[a, +\infty[$:

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n'(x) .$$

Chacun des termes de cette somme étant strictement négatif, on en déduit le résultat.

3 - Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Soit $a > 1$. Par des arguments similaires à la question **1-**, on peut établir la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ sur $[a, +\infty[$. Les fonctions $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ étant continues, le théorème de continuité s'applique, et on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} \zeta_n(x)\,.$$

Si $n = 1$, $\zeta_n(x) = 1$ pour tout $x > a$, et donc $\lim_{x\to+\infty} \zeta_n(x) = 1$.

Si $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} \zeta_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^x} = 0$.

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

4 - **(a)** Montrer que pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x}\,.$$

Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ étant décroissante sur $]1, +\infty[$, on a :

$$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \text{ pour } n \geq 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt \text{ pour } n \geq 2\,.$$

Il vient que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}$ converge, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta \quad \text{ et } \quad \zeta - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} dt\,,$$

d'où le résultat.

(b) En déduire que $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}\,.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}\,,$$

ce qui équivaut à

$$1 \leq \zeta(x) / \left(\frac{1}{x-1}\right) \leq x\,,$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) / \left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 1$, d'où le résultat.

5 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec, pour $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}\,, \quad x \geq 0\,.$$

(a) Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x > 0$. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ est alternée, et la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)$ tend vers 0 en décroissant. Le théorème des séries alternées garantit la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

Soit $x > 1$. Les fonctions ζ et f sont bien définies sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned}\zeta(x) + f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\xi_n(x) + f_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} + \frac{(-1)^n}{n^x}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p)^x} = 2^{1-x}\zeta(x)\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

<u>Exercice 3 :</u> *Séries alternées*

On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1 - Montrer que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.
Soit $x > -1$. On étudie la série alternée de terme général $\dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La suite $\left(\dfrac{1}{x+n}\right)$ tend vers 0 en décroissant, donc on peut appliquer le théorème des séries alternées, pour obtenir la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. On en déduit la convergence simple de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sur $]-1, +\infty[$.

2 - Montrer que S est continue sur I.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ vérifie le critère des séries alternées, et la série des restes vérifie :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \le |f_{n+1}(x)| \le \frac{1}{x+n+1} \le \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, la série des restes de converge uniformément vers 0. On en déduit la convergence uniforme de la série. Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant continues, on applique le théorème de régularité des séries de fonctions, pour obtenir la continuité de S sur $]-1, +\infty[$.

3 - Montrer que S est dérivable sur I et calculer sa dérivée. En déduire que S est croissante.

D'après ce qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,+\infty[$. D'autre part, les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in I$ $f_n'(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. Par un raisonnement analogue à la question **1**, on peut établir (théorème des séries alternées) que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $]-1,+\infty[$. Ainsi, par application du théorème de dérivation, on a pour tout $x\in I$:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}\,.$$

Soit $x\in I$. Posons à présent $S_p(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ et $T_p(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{2p+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}=S_p(x)+\dfrac{1}{(x+2p+1)^2}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$. On vérifie aisément que ces deux suites sont adjacentes et convergent vers $S'(x)$. De plus, on a :

$$S_1(x)\le S'(x)\le T_0(x)\,,$$

c'est à dire

$$0\le\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}\le S'(x)\le\frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

On en déduit la décroissance de S.

4 - Déterminer les limites de S en-1 et $+\infty$.

Rappelons que les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est uniformément convergente sur I. Par application du théorème de convergence des limites, on a :

$$\lim_{x\to-1^+} S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to-1^+} f_n(x)\,.$$

On traite séparément le cas $n=1$, pour lequel on a $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{-1}{x+1}=-\infty$.
Si $n>1$, $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{(-1)^n}{x+n}=\frac{(-1)^n}{n-1}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} S(x)=-\infty$.
Un raisonnement analogue permet de conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)=0$.

<u>Exercice 4 :</u> *Séries trigonométriques*

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge1} f_n$ avec :

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^2}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

1 - Montrer cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme

Il est immédiat que pour tout entier non nul n, on a $\|f_n\|\le\dfrac{1}{n^2}$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\ge1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2 - Montrer $\displaystyle\sum_{n\ge1} f_n'$ converge simplement sur tout intervalle de la forme $]2k\pi,2(k+1)\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$.

Notons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$.
Posons à présent $I_k =]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et considérons $x \in I_k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \cos(nx)$, de sorte que $f_n'(x) = u_n v_n$. Il s'agit à présent d'appliquer le théorème d'Abel pour les suites numériques (voir **Fiche 2**).
• La suite (u_n) tend vers 0.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n - u_{n+1}| = \dfrac{1}{n(n+1)}$. En utilisant $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, on obtient la convergence de la série de terme général $|u_n - u_{n+1}|$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $V_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=1}^{n} \cos(x)$. Remarquons tout d'abord que :

$$\sum_{p=1}^{n} \exp(ipx) = \sum_{p=1}^{n} \cos(ipx) + i\sum_{p=1}^{n} \sin(ipx)\,,$$

et par suite $V_n = Re\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \exp(ipx)\right)$. En notant que $x \in I_k \Rightarrow \exp(ix) \neq 0$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} \exp(ipx) = \sum_{p=1}^{n} \exp(ix)^p = \exp(ix)\sum_{p=0}^{n-1} \exp(ix)^p = \exp(ix)\left(\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right)\,,$$

d'où l'on tire $|V_n| = \left|Re\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \exp(ipx)\right)\right| \leq \left|\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \exp(ipx)\right| \leq \left|\dfrac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right|$. En utilisant

$$\begin{aligned}\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)} &= \frac{\exp\left(\frac{inx}{2}\right)}{\exp\left(\frac{ix}{2}\right)}\left(\frac{\exp\left(\frac{-inx}{2}\right)-\exp\left(\frac{inx}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{ix}{2}\right)-\exp\left(\frac{ix}{2}\right)}\right)\\ &= \exp\left(\frac{i(n-1)x}{2}\right)\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,,\end{aligned}$$

on en conclut que $|V_n| \leq \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$, et par suite que la suite (V_n) est bornée.

Le théorème d'Abel pour les séries numériques permet de conclure que la série de terme général $u_n v_n$ converge. En conclusion, La série $\displaystyle\sum_{n\geq1}^{n} f_n'$ converge simplement sur $I_k =]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3 - Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]2k\pi+\varepsilon, 2(k+1)\pi-\varepsilon[$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\varepsilon > 0$.

Indication : On pourra utiliser le théorème d'Abel pour établir la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq1} f_n'$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons à présent $I_k^\varepsilon =]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Considérons les suites de fonctions (u_n) et (v_n) définies par $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ et $v_n(x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in I_k^\varepsilon$.

• Il est clair que pour tout $x \in I_k^\varepsilon$ la suite numérique $(u_n(x))$ est une suite décroissante de réels strictement positifs, et que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

• Considérons un entier n non nul, et posons $V_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_n(x) v_n(x)$ pour tout $x \in I_k^\varepsilon$. Par un raisonnement analogue à la question précédente, on a $|V_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$ pour tout $x \in I_k^\varepsilon$. D'autre part :
$x \in]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[\Rightarrow x/2 \in]k\pi + \varepsilon/2, (k+1)\pi - \varepsilon/2[\Rightarrow |\sin(x/2)| \leq \sin(k\pi + \varepsilon/2)$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I_k^\varepsilon$, $|V_n(x)| \leq M = \dfrac{1}{\sin(k\pi + \varepsilon/2)}$.

D'après le théorème d'Abel pour les séries de fonctions, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $I_k^\varepsilon =]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur chacun de ces intervalles, ce qui permet de conclure.